Chứng minh trong $\mathbb{R}^3$

Chứng minh rằng:

$$\oint_C f\,\nabla g \cdot d\vec{s} = -\oint_C g\,\nabla f \cdot d\vec{s},$$

trong đó f, g là hai hàm vô hướng trơn, C là biên của một mặt cong đơn, chính quy, trơn cấp hai.

Ý tưởng tổng quát

Mấu chốt nằm ở đẳng thức:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$$

và việc:

$$\oint_C \nabla(\varphi) \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{với mọi hàm vô hướng trơn } \varphi.$$

Phần 1 — Nhận dạng biểu thức

Xét tích phân đường:

$$\oint_C f\nabla g \cdot d\vec{s}.$$

Đây là tích phân của trường vector $\vec{F} = f\nabla g$ dọc theo đường kín C.

Phần 2 — Công thức gradient của tích

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad \Rightarrow \quad f\nabla g = \nabla(fg) - g\nabla f.$$

Phần 3 — Thay vào tích phân

$$\oint_C f\nabla g \cdot d\vec{s} = \oint_C \big(\nabla(fg) - g\nabla f\big) \cdot d\vec{s}.$$

Tính tuyến tính của tích phân cho:

$$= \oint_C \nabla(fg) \cdot d\vec{s} - \oint_C g\nabla f \cdot d\vec{s}.$$

Phần 4 — Vì sao tích phân của gradient bằng 0?

Với mọi hàm vô hướng trơn φ:

$$\oint_C \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = 0.$$

Lý do: $\nabla\varphi$ là trường thế, tích phân đường chỉ phụ thuộc điểm đầu – cuối. Trên đường kín, điểm đầu = điểm cuối $\Rightarrow$ hiệu bằng 0.

Áp dụng cho $\varphi = fg$:

$$\oint_C \nabla(fg) \cdot d\vec{s} = 0.$$

Phần 5 — Suy ra điều phải chứng minh

$$\oint_C f\nabla g \cdot d\vec{s} = -\oint_C g\nabla f \cdot d\vec{s}.$$

Hoàn thành chứng minh.

Tóm tắt bản chất

Ý	Giải thích
Công cụ chính	$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
Vì sao mất một vế	Gradient $\rightarrow$ trường thế
Vì sao cần C là biên mặt trơn	Đảm bảo áp dụng định lý cơ bản
Ý đồ đề	Kiểm tra hiểu gradient + tích phân đường kín

Nhìn theo góc định lý Stokes

Ta cũng có thể viết:

$$\oint_C f\nabla g \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times (f\nabla g) \cdot d\vec{S}.$$

Mà:

$$\nabla \times (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g.$$

Do đó:

$$\oint_C f\nabla g \cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\vec{S}.$$

Đổi vai f, g thì:

$$\nabla g \times \nabla f = -\nabla f \times \nabla g,$$

nên kết quả đổi dấu.

Câu chốt để nhớ

"Gradient của tích = tích gradient + gradient tích" $\Rightarrow$ Tích phân gradient trên đường kín bằng 0.